Mehmet Maraz

MechanikNachhilfe

1. Auflage 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Statik **1**

1.1 Lagerungen und Lagerreaktionen 2

1.2 Kräftegleichgewichte 5

1.2.1 Drehmoment 6

1.2.2 3D-Systeme 14

1.3 Streckenlast 22

1.4 Schwerpunkt 25

1.5 Haftreibung 33

1.6 Schnittgrößen 45

1.6.1 Berechnung von Schnittgrößen durch Intergration . . . 47

1.7 Ebene Fachwerke 59

2 Elastostatik **67**

2.1 Dehnung 68

2.2 Flächenträgheitsmoment 81

2.3 Biegung 86

2.4 Normalspannung 91

2.5 Torsion 98

3 Kinematik **105**

3.1 Satz von Euler 106

3.2 Momentanpol 112

4 Kinetik **125**

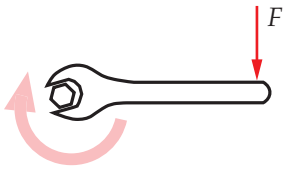
4.1 Massenträgheitsmoment 126

4.2 Impuls- und Drehimpulssatz 129

4.3 Energieerhaltungssatz 141

1.2.1 Drehmoment

Kräfte können neben geradlinige Bewegungen auch Drehbewegungen verursachen. Diese Drehwirkung, auch Drehmoment bezeichnet, bezieht sich immer auf einen bestimmten Punkt (in 2D) bzw. eine Achse (in 3D). Als Beispiel hierzu schauen wir uns das Festziehen einer Schrauben mithilfe eines Schraubenschlüssels an. Um die in der Abb. gezeigte Schraube festzuziehen wird am Ende des Schraubenschlüssels eine Kraft F aufgewendet.



Durch diese Kraft wird die Schraube rechts herum gedreht. Die Drehung findet genau um den Mittelpunkt der Schraube statt. Dies ist der sogenannte Momentenbezugspunkt. Also der Punkt, um den die Schraube gedreht wird. Das durch die Kraft F auf die Schraube übertragene Moment ist definiert als

Moment

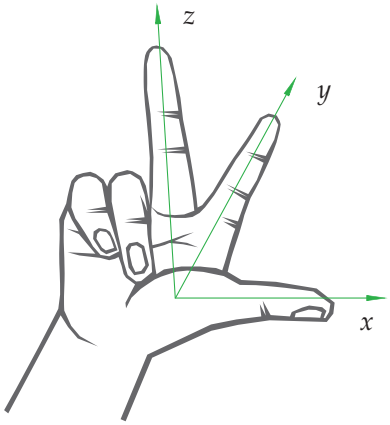
$$M = F \cdot l$$

M	Moment
F	Kraft
l	Hebelarm

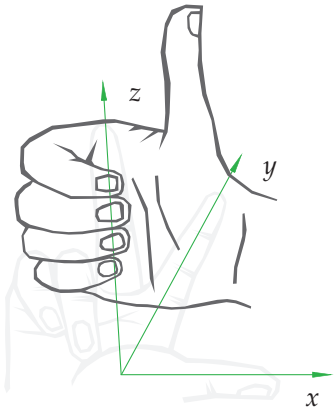
Der in der Formel angegebene Hebelarm ist in unserem oben gezeigten Beispiel der Abstand zwischen dem Kraftangriffspunkt und dem Mittelpunkt der Schraube. Das Moment einer Kraft bezüglich eines bestimmten Punktes (Momentenbezugspunkt) kann man wie folgt bestimmen.

Vorgehensweise | Momente

1. Momentenbezugspunkt wählen.
2. Wirkungslinie der Kraft einzeichnen.
3. Den kürzesten Abstand zwischen Momentenbezugspunkt und Wirkungslinie der Kraft bestimmen. Dies ist der Hebelarm. Der kürzeste Abstand zwischen einem Punkt und einer Linie ist immer der senkrechte Abstand.
4. Drehsinn bestimmen (siehe Rechte-Hand-Regel unten).

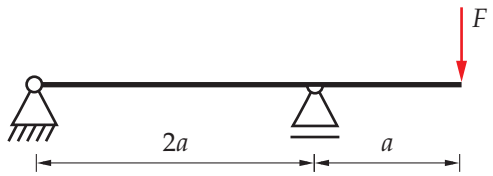


Um den Drehsinn bezüglich einer Achse zu erkennen, muss man in einem nächsten Schritt mit der rechten Hand nun die gewünschte Achse, bspw.z-Achse umgreifen, wobei der Daumen in die positive z-Richtung zeigen muss. Nun zeigen die Finger die positive Drehrichtung bezüglich der gewünschten Achse.



Für die Bestimmung des Drehsinns für Momente um die x-Achse muss dementsprechend analog die rechte Hand die x-Achse mit dem Daumen in die positive Richtung umfassen. Die Finger zeigen auch hier wieder die positive Drehrichtung an.

Aufgabe 1.2.1 Ein Balken wird wie dargestellt durch eine Einzelkraft belastet. Man ermittle alle Lagerreaktionen.



Gegeben a, F

Vorgehensweise | Kräftegleichgewichte

1. Koordinatensystem festlegen.
2. Körper freischneiden (Freikörperbild).
3. Kräfte einzeichnen.
4. Gleichgewichtsbedingungen aufstellen (2 Kräftesummen, 1 Momentensumme). Den Momentenbezugspunkt so wählen, dass möglichst viele unbekannte Kräfte wegfallen.
5. Nach Unbekannten auflösen.

Lösung 1.2.1 Als erstes wird das Koordinatensystem festgelegt. Wir verwenden das x, y-Koordinatensystem. Im darauffolgenden Freikörperbild wird der Balken als Ganzes freigeschnitten, da es sich dabei um ein einzelnes, zusammenhängendes Bauteil handelt. Bei der Eintragung der Lagerreaktionen (A_x, A_y und B) werden diese in einer beliebigen Richtung angenommen, da sie noch unbekannt sind. Die Kraft F jedoch muss so eingetragen werden, wie sie auch vorgegeben ist, da es sich dabei um eine eingeprägte bzw. von außen wirkende Kraft handelt. Das bedeutet, man weiß wie diese Kraft wirkt.

Nun werden die Kräftesummen und die Momentensumme aufgestellt

$$\sum F_x = 0 = A_x \tag{1.1}$$

$$\sum F_y = 0 = A_y + B - F \tag{1.2}$$

$$\sum M_A = 0 = 2aB - 3aF \tag{1.3}$$

Aus der Gleichung (1.1) folgt

$$\boxed{A_x = 0}$$

Aus Gleichung (1.3) ergibt sich durch Umstellung und Auflösung nach der gesuchten Größe B

$$2aB = 3aF$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B = \frac{3}{2}F}$$

B in Gleichung (1.2) eingesetzt und nach der gesuchten Größe A_y umgeformt ergibt schließlich

$$0 = A_y + B - F$$

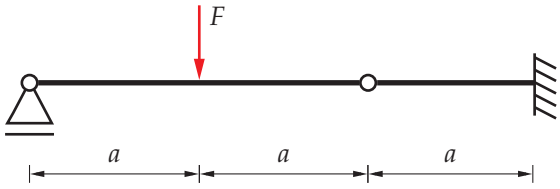
$$\Leftrightarrow 0 = A_y + \frac{3}{2}F - F$$

$$\Leftrightarrow A_y = F - \frac{3}{2}F$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A_y = -\frac{1}{2}F}$$

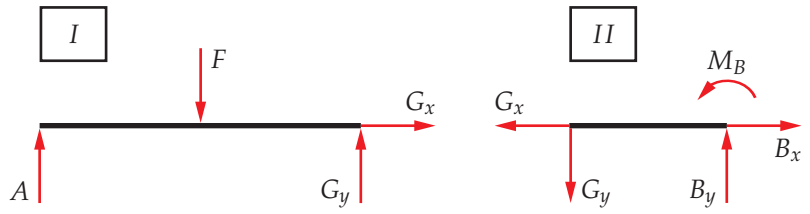
Damit sind alle Unbekannten Kräfte (Lagerreaktionen A_x, A_y und B) berechnet und die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 1.2.2 Das System wird wie dargestellt durch eine Einzelkraft belastet. Man ermittle alle Lagerreaktionen.



Gegeben a, F

Lösung 1.2.2 Das System muss in zwei Teile zerlegt werden, da es sich hierbei um zwei Bauteile handelt, die über ein Gelenk miteinander verbunden sind. Diese werden am Gelenk getrennt. Hierbei ist zu beachten, die Gelenkkräfte einzutragen. Die Richtungen der Gelenkkräfte sind an den beiden Bauteilen jeweils entgegengesetzt.



Für den Körper I lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_x = 0 = G_x \Rightarrow \boxed{G_x = 0} \tag{1.4}$$

$$\sum F_y = 0 = A - F + G_y \tag{1.5}$$

$$\sum M^A = 0 = -aF + 2aG_y \Leftrightarrow \boxed{G_y = \frac{1}{2}F} \tag{1.6}$$

Der Momentbezugspunkt wurde am linken Stabende angenommen. Aus der Gleichung (1.5) folgt mit $G_y = \frac{1}{2}F$

$$\Leftrightarrow A = F - G_y = F - \frac{1}{2}F = \boxed{\frac{1}{2}F = A}$$

Für den Körper II lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_y = 0 = -G_x + B_x$$

Da wir wissen, dass $G_x = 0$ ist, folgt hier sofort

$$\boxed{B_x = 0}$$

Durch die beiden übrigen Summen können die verbleibenden Unbekannten aufgelöst werden

$$\sum F_y = 0 = -G_y + B_y \Leftrightarrow B_y = G_y = \boxed{\frac{1}{2}F = B_y}$$

$$\sum M^B = 0 = M_B + aG_y \Leftrightarrow M_B = -aG_y = \boxed{-a\frac{1}{2}F = M_B}$$

Der Momentenbezugspunkt wurde am rechten Stabende angenommen.

1.2.2 3D-Systeme

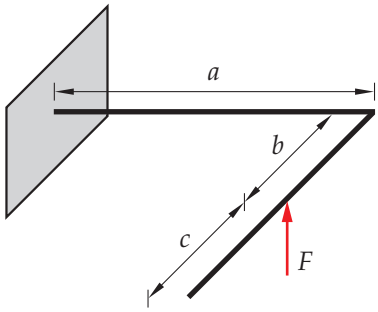
Die vorherigen Aufgaben waren zweidimensional. Nun schauen wir uns dreidimensionale Systeme an. Bei 3D-Systemen kommt eine zusätzliche Koordinatenachse hinzu. In diesem Fall die z-Achse. Zu den bestehenden Kräftegleichgewichten ($\sum F_x$ und $\sum F_y$) kommt nun eine weitere Gleichung ($\sum F_z$) hinzu. Bei den Momentengleichgewichten müssen zwei weitere Gleichungen aufgestellt werden.

Vorgehensweise | Kräftegleichgewichte in 3D-Systemen

1. Koordinatensystem festlegen (dreidimensional).
2. Körper freischneiden (Freikörperbild).
3. Kräfte einzeichnen.
4. Gleichgewichtsbedingungen aufstellen (3 Kräftesummen, 3 Momentensumme). Den Momentenbezugspunkt so wählen, dass möglichst viele unbekannte Kräfte wegfallen.
5. Nach Unbekannten auflösen.

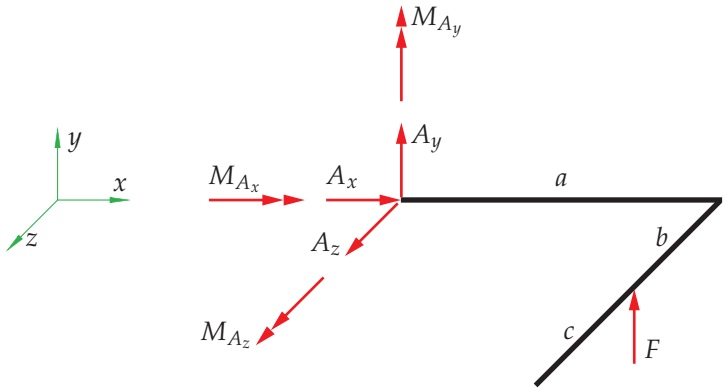
Aufgabe 1.2.3 Eine in die Wand fest eingespannte rechtwinklinge Stange wird wie dargestellt belastet. Man ermittle alle Lagerreaktionen.

Gegeben a, b, c, F



Gegeben a, b, c, F

Lösung 1.2.3 Die rechtwinklige Stange wird von der festen Einspannung freigeschnitten. Da es sich um ein dreidimensionales System handelt, müssen nun drei Koordinatenachsen betrachtet werden. Neben den Kräften, die entlang der x- und y-Koordinate auftreten, müssen nun auch die Kräfte entlang der z-Koordinate berücksichtigt werden. Bei den zweidimensionalen Aufgaben wurden in festen Einspannung bisher nur zwei Kräfte und ein mögliches Moment eingetragen. Im dreidimensionalen tragen wir nun neben drei Kräften auch alle drei möglichen Momente ein, die auftreten können. Momente um eine bestimmte Achse stellen wir auf dem zweidimensionalen Blatt als Doppelpfeile dar, um die Übersicht zu behalten. Die Pfeilrichtung zeigt dabei an, ob das Moment positiv oder negativ ist. Mit der oben besprochenen Rechte-Hand-Regel ist dadurch die Drehrichtung nachvollziehbar.



Die Gleichgewichtsbedingungen lauten, wobei der Momentenbezugspunkt sich bei Punkt A (Einspannung) befindet

$$\sum F_x = 0 = A_x \qquad \Rightarrow \boxed{A_x = 0} \tag{1.7}$$

$$\sum F_y = 0 = A_y + F \qquad \Leftrightarrow \boxed{A_y = -F} \tag{1.8}$$

$$\sum F_z = 0 = A_z \qquad \Rightarrow \boxed{A_z = 0} \tag{1.9}$$

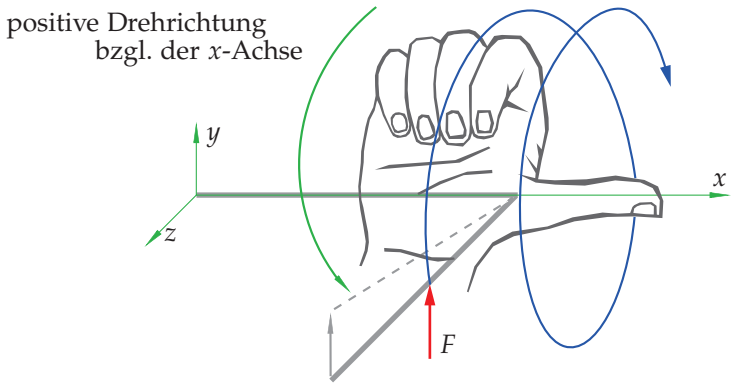
$$\sum M_x^A = 0 = M_{A_x} - F \cdot b \qquad \Leftrightarrow \boxed{M_{A_x} = Fb} \tag{1.10}$$

$$\sum M_y^A = 0 = M_{A_y} \qquad \Leftrightarrow \boxed{M_{A_y} = 0} \tag{1.11}$$

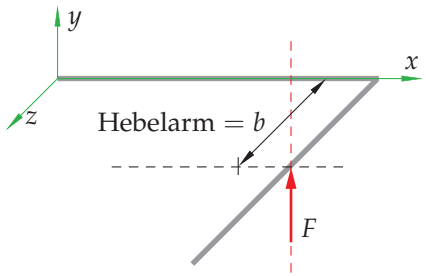
$$\sum M_z^A = 0 = M_{A_z} + F \cdot a \qquad \Leftrightarrow \boxed{M_{A_z} = -Fa} \tag{1.12}$$

Der Drehsinn des Moments $-F \cdot a$, welches in der Summe für M_x^A auftritt, kann nach der Rechte-Hand-Regel wie folgt erklärt werden. Man umgreift mit der rechten Hand die x-Achse, so dass der Daumen in die positive Koordinatenrichtung zeigt. Nun prüft man, in welcher Weise die Kraft F die

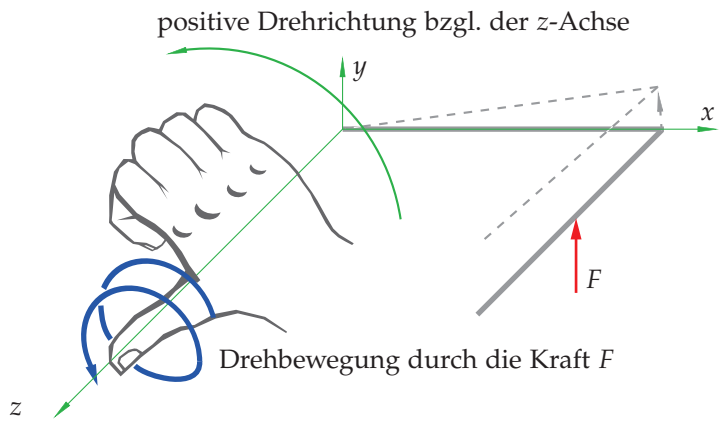
rechte Hand um die x-Achse drehen würde. Da die Kraft von uns aus gesehen weiter vorne liegt und nach oben zeigt, resultiert eine Drehbewegung, die den gekrümmten Fingern der rechten Hand entgegenwirkt. Dadurch erhält man das negative Vorzeichen bzw. den Drehsinn des Moments. Postiv wäre das Moment, wenn die Drehbewegung in Richtung der gekrümmten Finger zeigen würde.



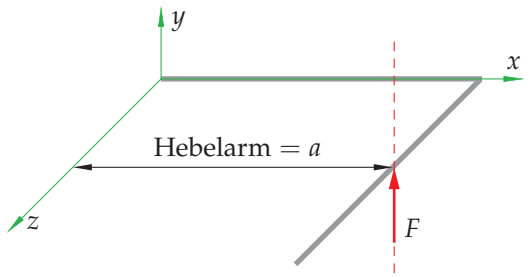
Der Hebelarm ist der senkrechte Abstand zwischen der Drehachse (in diesem Fall die grüne x-Koordinatenachse) und der Wirkungslinie (rot gestrichelt) der Kraft F.



Der Drehsinn des Moments $F \cdot a$, dass in der Summe für M_z^A auftritt, kann nach der Rechte-Hand-Regel wie folgt erklärt werden. Man umgreift mit der rechten Hand die z-Achse, so dass der Daumen in die positive Koordinatenrichtung zeigt. Nun prüft man, in welcher Weise die Kraft F die rechte Hand drehen würde. Da die Kraft von uns aus gesehen rechts von der z-Achse liegt und nach oben zeigt, resultiert eine Drehbewegung, die der Richtung der gekrümmten Fingern der rechten Hand entspricht. Dadurch erhält man das positive Vorzeichen bzw. den Drehsinn des Moments.

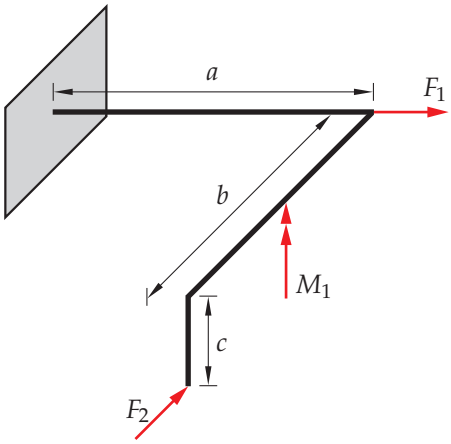


Der Hebelarm ist der senkrechte Abstand zwischen der Drehachse (in diesem Fall die grüne z-Koordinatenachse) und der Wirkungslinie (rot gestrichelt) der Kraft F.



Aufgabe 1.2.4 Eine in die Wand fest eingespannte abgewinkelte Stange wird wie dargestellt durch zwei Kräfte und ein Moment belastet. Man ermittle alle Lagerreaktionen.

Gegeben a, b, c, F_1, F_2, M_1

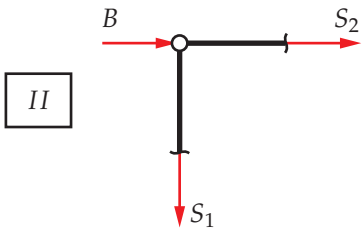


$$\sum F_x = 0 = A_x + S_4 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 \tag{1.47}$$

$$\sum F_y = 0 = A_y + S_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 \tag{1.48}$$

Hier können noch keine Stabkräfte konkret berechnet werden, da es noch zu viele Unbekannte gibt. Wir betrachten daher den nächsten Knoten.

Knoten II



$$\sum F_x = 0 = B + S_2 \Leftrightarrow \boxed{S_2 = -B = 2F} \tag{1.49}$$

$$\sum F_y = 0 = -S_1 \Leftrightarrow \boxed{S_1 = 0} \tag{1.50}$$

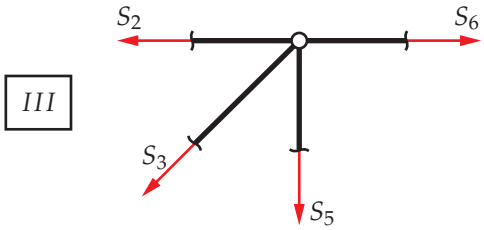
S_1 ist ein Nullstab. Eingesetzt in (1.48) ergibt

$$0 = F + \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 \Leftrightarrow \boxed{S_3 = -\frac{2F}{\sqrt{2}}}$$

S_3 in (1.47) ergibt

$$0 = 2F + S_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{2F}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \boxed{S_4 = -F}$$

Knoten III



$$\sum F_x = 0 = -S_2 + S_6 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 \tag{1.51}$$

$$\sum F_y = 0 = -S_5 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 \tag{1.52}$$

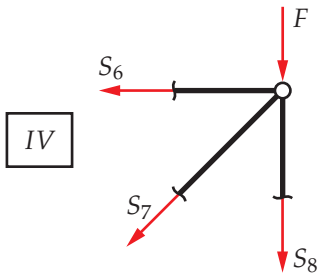
Mit $S_2 = 2F$ und $S_3 = -\frac{2F}{\sqrt{2}}$ folgt für $S6$ in (1.51)

$$0 = -2F + S_6 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{2F}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \boxed{S_6 = F}$$

Mit $S_3 = -\frac{2F}{\sqrt{2}}$ folgt für S_5 in (1.52)

$$0 = -S_5 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{2F}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \boxed{S_5 = F}$$

Knoten IV



$$\sum F_x = 0 = -S_6 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_7 \tag{1.53}$$

$$\sum F_y = 0 = -F - S_8 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_7 \tag{1.54}$$

Mit $S_6 = F$ folgt für S_7 in (1.53)

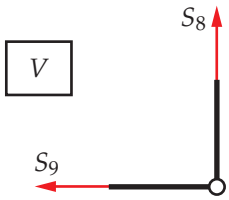
$$0 = -F - \frac{\sqrt{2}}{2}S_7 \Leftrightarrow \boxed{S_7 = -\frac{2F}{\sqrt{2}}}$$

Mit $S_7 = F$ folgt für S_8 in (1.54)

$$0 = -F - S_8 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{2F}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \boxed{S_8 = 0}$$

S_8 ist ein Nullstab.

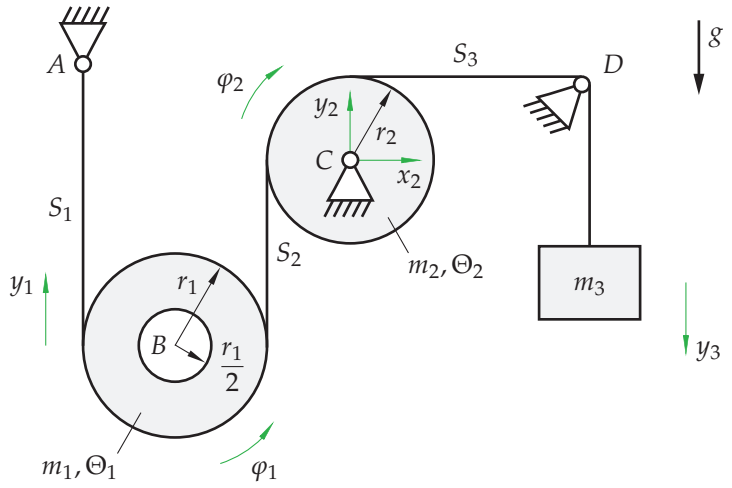
Knoten V



$$\sum F_x = 0 = S_9 \Leftrightarrow \boxed{S_9 = 0}$$

S_9 ist ebenfalls ein Nullstab. Somit ergeben sich folgende Ergebnisse:

Aufgabe 4.2.1 Auf einem Band (Masse vernachlässigbar), das in A befestigt ist und über eine massebehaftete Umlenkrolle (Radius r_2, Masse m_2, Massenträgheitsmoment Θ_2) und eine masselose Umlenkrolle geführt wird, liegt ein Hohlzylinder (Radien r_1, $\frac{r_1}{2}$, Masse m_1, Massenträgheitsmoment Θ_1). Mit Hilfe des Gegengewichtes (Masse m_3) wird der Hohlzylinder angehoben. Die Massenträgheitsmomente sind bezüglich des jeweiligen Schwerpunktes anzunehmen.



Gegeben $g, m_1, m_2, m_3, r_1, r_2, \Theta_1, \Theta_2$

a) Stellen Sie alle Gleichgewichtsbedingungen der massebehafteten Körper (bezüglich deren Schwerpunkte) auf. Verwenden Sie hierzu die angegebenen Koordinaten.

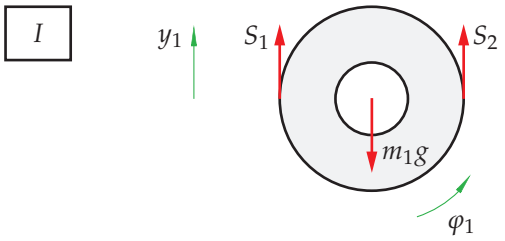
b) Bestimmen Sie die Gleichungen für die kinematischen Bindungen (Beziehung zwischen $\ddot{y}_1, \ddot{\varphi}_1$ und $\ddot{\varphi}_2$ in Abhängigkeit von $\ddot{y}_3$).

c) Berechnen Sie die Massenträgheitsmomente Θ_1 und Θ_2 bezüglich deren Schwerpunkte für den Hohlzylinder und die Umlenkrolle.

Lösung 4.2.1

a)

Körper *I* Zunächst erfolgt der Freischnitt für Körper I. Es werden in das Freikörperbild alle Kräfte eingezeichnet. Die Koordinatensysteme sind ebenfalls eingetragen worden, sind jedoch nicht zwingend erforderlich.



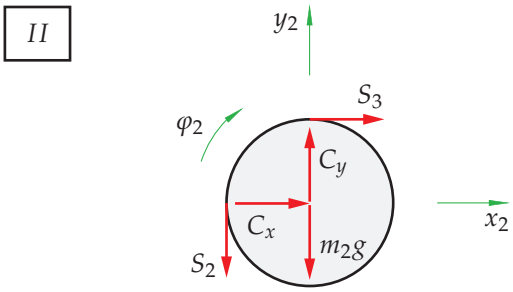
Nun werden die Impulssätze und der Drallsatz für Körper I aufgestellt. Der Drallsatz wurde bezüglich des Mittelpunktes gebildet.

$$m_1 \ddot{x}_1 = 0$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = S_1 + S_2 - m_1 g$$

$$\Theta_1 \ddot{\varphi}_1 = S_2 r_1 - S_1 r_1$$

Körper *II* Analog zu Körper I wird auch hier zunächst das Freikörperbild erstellt und alle Kräfte eingetragen.



Analog folgen hier die Impulssätze und der Drallsatz. Auch hier wurde der Drallsatz bezüglich des Mittelpunktes gebildet.

$$m_2 \ddot{x}_2 = S_3 + C_x$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -S_2 - m_2 g + C_y$$

$$\Theta_2 \ddot{\varphi}_2 = S_3 r_2 - S_2 r_2$$